Лабораторная работа №2

*Компьютерная алгебра[[1]](#footnote-1)* — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре. При этом ответ на вопрос о том, относится ли конкретная задача к компьютерной алгебре, часто зависит от склонностей специалиста.

*Компьютерная алгебра[[2]](#footnote-2)* – это новая, быстро развивающиеся область, ориентированная на использовании ЭВМ для выполнения аналитических(нечисленных) преобразований математический выражений: полиномов, рядов, рациональных функций и т.д.

*Компьютерная алгебра[[3]](#footnote-3)* – это часть информатики, которая занимается разработкой, анализом, реализацией и применением алгебраических алгоритмов.

Представление базовых объектов компьютерной алгебры

Базовые объекты компьютерной алгебры

* Целые числа
* Рациональные числа
* Полиномы от одной переменной
* Полиномы от нескольких переменных
* Рациональные функции

Возможны различные способы представлений целых чисел:

1. Ограниченной точности, когда количество цифр в целом числе задано. К таковым относятся все стандартные арифметики в языках программирования.
2. Произвольно заданной точности, когда количество цифр в заданном числе можно менять, но только один раз – задавать перед вычислениями.
3. Неограниченной точности, когда количество цифр в числе не ограничивается никаким наперёд заданным числом, кроме ограничений, связанных с размером памяти машины.

В системах компьютерной алгебры целые числа

неограниченной точности, реализуются программным путем,

(этот тип данных считается базовым).

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности:

(1) отношение числителя и знаменателя (оба – числа произвольной точности), более точно, в виде записи, хранящей ссылку на список – числитель и ссылку на список – знаменатель. Такое представление является нормальным. Проблема – для нормального представления необходимо распознавание идентичных чисел.

(2) Также, как в (1), но выполнив дополнительные условия:

* числитель и знаменатель числа должны быть сокращены на наибольший общий делитель (НОД);
* знаменатель должен быть положительным числом.

Проблема - требуется вычисление НОД двух целых чисел произвольной точности.

При большом количестве цифр в числах эта процедура является алгоритмически сложной. Тем более, её надо производить на одном из самых низких уровнях вычислений – при каждом вычислении чисел.

Замечание. В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности.

Представление алгебраических функций

*Алгебраическая функция* [[4]](#footnote-4)— элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

*Алгебраическая функция[[5]](#footnote-5)* (алгебраическое уравнение), функция, которую можно записать, используя рациональные степени переменных.

*Алгебраическая функция[[6]](#footnote-6)* - это функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических действий.

Другими словами: алгебраическими называют элементарные функции, которые могут быть получены из двух основных функций f(x)=x и f(x)=1 при помощи любого числа последовательно выполненных алгебраических действий (сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень, извлечение корня) и умножения на формулачисловые коэффициенты.

Например, функция является алгебраической.

Алгебраические функции подразделяются на рациональные и иррациональные.

Рациональные функции.

Рациональными называются алгебраические функции, которые не содержат аргумент под знаком радикала (корня).

формулаРациональные функции разделяются на целые рациональные функции (многочлены) и дробные рациональные (отношение многочленов).

формулаПример целой рациональной функции:

Пример дробно-рациональной функции:

Иррациональные функции.

формулаИррациональными называются алгебраические функции, содержащие аргумент под знаком радикала (корня).

Примером может являться функция

Алгебраические числа и алгебраические функции в представлении систем компьютерной алгебры[[7]](#footnote-7)

Алгебраическим называется число, являющееся решением уравнения:

P ( x ) = 0

где P ( x ) – полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Пример. Полином P ( x ) = x 2 – 2 порождает алгебраическое число √ 2.

Алгебраической называется функция, являющаяся решением уравнения:

G ( x ) = 0

где G ( x ) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами –

полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

Пример. Полином G ( x ) = x 2 – 2 + y порождает алгебраическую функцию √ (2 – y).

Ключевая проблема построения канонического представлениядля алгебраических функций общего вида – это проблема определения их взаимозависимости.

Существует два способа решения указанной проблемы:

* Факторизация порождающего полинома алгебраической функции

и анализ её результатов

* Построение примитивных элементов поля алгебраических функций.

Оба способа разрешения взаимозависимости рациональных функций вычислительно трудоёмки, поэтому в системах компьютерной алгебры канонические представления для алгебраических функций не применяются.

Замечание - Вывод. Существование теоретических алгоритмов разрешения проблем представления алгебраических функций не означает их практическую реализацию.

Представление матриц

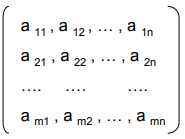
*Ма́трица* [[8]](#footnote-8)— математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы.

Элементами матрицы могут быть объекты совершенно разнообразной природы: числа, переменные или, к примеру, иные матрицы.

Обычно матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C и так далее. Например: .

Элементы матриц обычно обозначаются маленькими буквами[[9]](#footnote-9). Например, элементы матрицы A обозначаются aij. Двойной индекс ij содержит информацию о положении элемента в матрице. Число i – это номер строки, а число j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент aij.

В компьютерной алгебре различают две формы представления матриц:

Двумерный массив:

Список списков:



Где aij– это ссылки на представление элементов матриц (формул).

Для представления матриц обычно используется плотное представление (т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые). В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.) применяется разреженное представление.

Замечание. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.

1. [intuit.ru](https://www.intuit.ru/studies/courses/3484/726/lecture/25605) [↑](#footnote-ref-1)
2. [computersbooks.net](http://computersbooks.net/index.php?id1=4&category=teoriyaprogramirovaniya&author=buhberger-b&book=1986) [↑](#footnote-ref-2)
3. [intuit.ru](https://www.intuit.ru/studies/courses/3484/726/lecture/25605?page=3) [↑](#footnote-ref-3)
4. [Википедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) [↑](#footnote-ref-4)
5. [Научно-технический энциклопедический словарь](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ntes/99/%D0%90%D0%9B%D0%93%D0%95%D0%91%D0%A0%D0%90%D0%98%D0%A7%D0%95%D0%A1%D0%9A%D0%90%D0%AF) [↑](#footnote-ref-5)
6. [alley-science](https://alley-science.ru/domains_data/files/78June2018/OSNOVNYE%20HARAKTERISTIKI%20FUNKCII.%20ELEMENTARNYE%20FUNKCII..pdf) [↑](#footnote-ref-6)
7. [КСИПТ](http://kspt.icc.spbstu.ru/media/files/2012/course/comp-algebra/CAS_L07.pdf) [↑](#footnote-ref-7)
8. [Википедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) [↑](#footnote-ref-8)
9. [math1.ru](https://math1.ru/education/matrix/matrix.html) [↑](#footnote-ref-9)